

אלגברה

לינארית

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & \omicron & \pi \\ \wp & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

4	פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות.....
11	פרק 2 - מטריצות.....
17	פרק 3 - זטרמינגטות.....
23	פרק 4 - מרחבים וקטורים.....
31	פרק 5 - תכנון ליניארי: ניסוח בעיות ופתרון גרפי.....

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{cccc} (1) & x+10y=11 & (2) & x-4y=-7 \\ (3) & 2x+y=3 & (4) & x+y=3 \\ 2x+y=4 & & x-y=0 & & x-y=-1 & & 2x-2y=0 \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{cccc} (1) & x+10y=11 & (2) & x-4y+z=-7 \\ (3) & 2x+y+z=3 & (4) & x=3 \\ 2x+y=4 & & x-z=0 & & x-y=-1 & & 2x-2=0 \\ z+t=8 & & & & x+y+z=5 & & x+y=3 \end{array}$$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{ccc} (1) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 \end{array}$$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{ccc} (1) & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \\ (2) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \\ (3) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

(5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.
 ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}^{(9)*} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$F=f, F=i$$

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה i ופעם מעל השדה f .

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{l} 8x - 4y = 10 \quad (3) \\ -6x + 3y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x + 8y = 20 \quad (2) \\ 3x + 6y = 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \quad (1) \\ 5x - 4y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \quad (6) \\ 4x + 6y + 16z = 8 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -11 \quad (5) \\ 2x + 3y - z = -5 \\ 3x + y - z = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \quad (4) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \quad (9) \\ -9x + 6y = -3 \\ 6x - 4y = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x - 7y = 0 \quad (8) \\ 8x - 14y = 2 \\ -16x + 28y = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3y = 2 \quad (7) \\ 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 2 \quad (12) \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ 2x + 8y + 12z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \quad (11) \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y - 3z + 2t = 2 \quad (10) \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t = 8 \end{array}$$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x - y + z = 1 & (1) & x + ky + z = 1 & (2) & x + 2ky + z = 0 & (3) \\ 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 & & x + y + kz = 1 & & 3x + y + kz = 2 & \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 & & kx + y + z = 1 & & x + 9ky + 5z = -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2x - y + z = 0 & (4) & kx - y = 1 & (5) & x + ky + 3z = 2 & (6) \\ x + 2y - z = 0 & & (k - 2)x + ky = -2 & & kx - y + z = 4 & \\ 5x + (1 - k)y + k^2z = 1 & & (k^2 - 1)z = 9 & & 3x + y + (2 + k)z = 0 & \end{array}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} 2x + ky = 3 & (1) & 2x - 3y + z = 1 & (2) & 3x + 4y - z = 2 & (3) \\ (k + 3)x + 2y = k^2 + 5 & & 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k & & kx - 2y + z = -1 & \\ 6x + 3ky = 7k^2 + 2 & & & & x + 8y - 3z = k & \\ 2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 & & & & & \end{array}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + 2y - 4z = b & (1) & 2x + 4y + az = -1 & (2) & x + y - z + t = 1 & (3) \\ 7x - 10y + 16z = 7 & & x + 2y + 4z = -4 & & ax + y + z + t = b & \\ 2x - ay + 3z = 1 & & x + 2y - 4z = 0 & & 3x + 2y + at = 1 + a & \\ x + 2y + 6z = -2b & & & & & \end{array}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} x + az = 1 \\ y + 2z = 2 \\ bx + cy + dz = 3 \end{array}$$

א. מצא תנאי עבור a, b, c, d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b, c, d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל השדה \mathbf{F} .

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 & \\ 3x_1 + x_3 = 0 & \end{array}$$

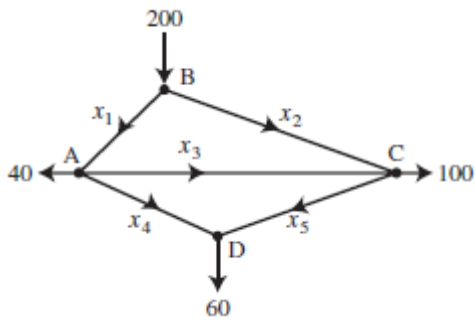
$$\begin{array}{ll} z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i & (2) \\ iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i & \\ (-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{F}, \mathbf{F} = \mathbb{I}}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{F}_5}$$

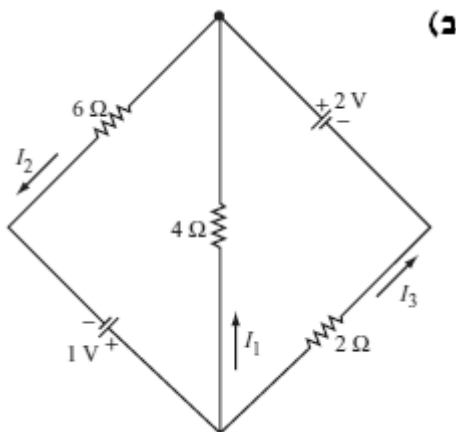
$$(12) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
 ח. מצא לאיזה ערך של k , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

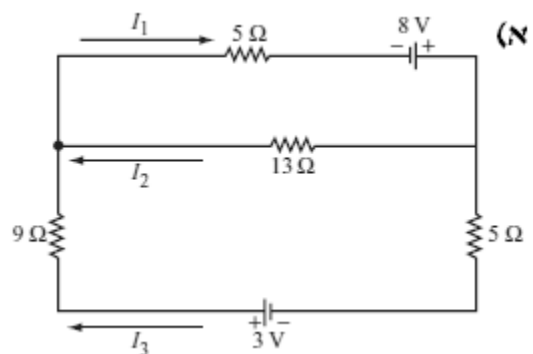


- (13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.
 א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.
 ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.
 ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4 = 0$.

- (14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):



(א)



(ב)

- * בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

תשובות:

(1) (1 ו-3) שקולות ו-2 (4) שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{(4)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 \quad (2) \quad R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad (2) \quad R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad (1) \quad (4)$$

(5) ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$F=i$ $F=\xi$

(6)

$$(x, y) = (5 - 2t, t) \quad (2)$$

 ϕ (4)

$$(x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (6)$$

 ϕ (8)

$$(x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (10)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (12)$$

$$(x, y) = (1, 2) \quad (1)$$

 ϕ (3)

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (5)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (7)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t\right) \quad (9)$$

 ϕ (11)

$$\text{א} \quad k = -2 \quad \text{ב} \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad \text{ג} \quad k = -2 \quad \text{ד} \quad k = 1 \quad \text{ה} \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad (17)$$

 $k = 1$

$$\text{א} \quad k = 1, k = -0.4 \quad \text{ב} \quad k \neq 1, k \neq -0.4 \quad \text{ג} \quad k = -1 \quad \text{ד} \quad k = \frac{4}{7} \quad \text{ה} \quad k \neq -1, k \neq \frac{4}{7} \quad (3)$$

$$\text{א} \quad k = \pm 1, k = -2 \quad \text{ב} \quad k \neq \pm 1, k \neq -2 \quad (5)$$

$$\text{א} \quad k = -1, k = -3, k = 2 \quad \text{ב} \quad k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \quad (6)$$

$$k=1 \text{ ב. } k \neq 1 \text{ א. (3) } \quad k \neq 3 \text{ ג. } k=3 \text{ ב. (2) } \quad k=1 \text{ ג. } k \neq \pm 1 \text{ ב. } k=-1 \text{ א. (1) (8)}$$

(9)

$$. a=2, b=-3 \text{ ג. } a=2, b \neq -3 \text{ ב. } a \neq 2 \text{ א. (1)}$$

$$. a=-6, b=2.5 \text{ ג. } a \neq -6 \text{ א. } b \neq 2.5 \text{ ב. (2)}$$

$$. a \neq 2 \text{ א. } a=2, b=2 \text{ ג. } a=2, b \neq 2 \text{ ב. (3)}$$

$$b=0, c=1.5, d=3 \text{ ב. } ab+2c \neq d \text{ א. (10)}$$

(11)

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=i} = (2, 3, -1), \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=i} = ((-1+i)t+1+i, 3, t) \quad (2) \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0) \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix} \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix} \text{ א. (12)}$$

$$k=2 \text{ ב. } k=-1 \text{ א. } k \neq 2, k \neq -1 \text{ ג. } k \neq 2, k \neq -1 \text{ א. (1)}$$

$$(x, y, z) = (1+0.2t, 0.8t, t) \text{ ד.}$$

$$k=-2 \text{ ה. } k=2 \text{ ו. } k=-2 \text{ ז. } k=\pm 2 \text{ ח.}$$

$$. x_4 = 60 - x_5, x_2 = 100 - x_3 + x_5, x_1 = 100 + x_3 - x_5 \text{ חופשיים. } x_5 \text{ ו- } x_3 \text{ א. (13)}$$

$$. x_5 = 60, x_4 = 0, x_2 = 160 - x_3, x_1 = 40 + x_3 \text{ חופשי. } x_3 \text{ ב.}$$

ג. 40

$$I_1 = -\frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11} \text{ ב. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317} \text{ א. (14)}$$

פרק 2 - מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

$$\begin{array}{llll} B+AB & (5) & AE-B & (4) & AC-D & (3) & AB & (2) & A+B & (1) \\ E(B-A) & (10) & E(AC) & (9) & E^T B & (8) & (E+A^T)D & (7) & E(B+A) & (6) \end{array}$$

(2) מצא את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

$$\begin{array}{llll} 2tr(D^2 - 2E) & (5) & 2D + 4EI_3 & (4) & 5C & (3) & E - D + I_3 & (2) & E + D & (1) \\ DABC & (10) & tr(C^T C) & (9) & I_2 BC & (8) & \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C & (7) & 4C^T + A & (6) \end{array}$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , ו- \underline{b} המבטאות את מערכת המשוואות

הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$.

$$\begin{array}{ll} 2x - 3y + z + t = 1 & (2) & 2x + y - z = 3 & (1) \\ 4x + y + 2z = 4 & & x + 2y - 4z = 5 & \\ y + z + t = 1 & & 6x + 4y + z = 2 & \\ x - 4z - 2y = 10 & & & \end{array}$$

(5) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות:

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (5) \quad A\underline{x} = \underline{x} \quad (4) \quad A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \quad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (2) \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון:

1. AA^T סימטרית. 2. $A + A^T$ סימטרית. 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. $A^2 + B$ סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$. מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A - B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$. הוכח:

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}$$

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z + 4t &= 1 & (2) & \quad 2x - y + z = 3 & (1) \\ x + 2y - z &= 0 & & \quad 3x - 2y + 2z = 5 \\ y + z + t &= 1 & & \quad 5x - 3y + 4z = 11 \\ x + 3y - z - 2t &= 0 & & & \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X :

$$\begin{aligned} P^{-1}X^T P &= A & (3) & \quad A^{-1}XC = A^{-1}DC & (2) & \quad AXC = D & (1) \\ ABC^T X^{-1}BA^T C &= AB^T & (6) & \quad (A - AX)^{-1} = X^{-1}C & (5) & \quad C^{-1}(A + X)D^{-2} = I & (4) \end{aligned}$$

ב. נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

ג. נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

ד. נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$$

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A

ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I - A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

$$(13) \text{ נתון: } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases} \text{ . הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה } D \text{ כך ש- } D^{-1}AD = C$$

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון

הוא יחס טרנזיטיבי).

הערה

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות:

$$\begin{matrix} (5 & (4 & 4 \times 2 & (3 & (2 & 4 \times 6 & (1 & (1) \\ 6 \times 6 & (10 & 6 \times 4 & (9 & (8 & 6 \times 2 & (7 & 6 \times 6 & (6 \end{matrix}$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}^{(4)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}^{(7)} \quad \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}^{(6)} \quad 230 \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}^{(10)} \quad 63 \quad (9)$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{matrix} (4+k)x - 2y + 4z = 1 & (3) & -2y + 4z = 1 & (2) & 4x - 2y + 4z = 1 & (1) & (5) \\ x + (k-1)y + z = 2 & & x - 5y + z = 2 & & x - y + z = 2 & & \\ x - 6y + (3+k)z = 3 & & x - 6y - z = 3 & & x - 6y + 3z = 3 & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2x + y + z = 3 & (5) & 3x - 2y + 4z = 0 & (4) \\ -2x - 3y - 6z = 6 & & x - 2y + z = 0 & \\ 4x + y + z = 9 & & x - 6y + 2z = 0 & \end{matrix}$$

1,2,3 .ג 2.ב 1,2,3 .א (6)

(7)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{(3)} & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}^{(1)} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} & \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(5)} & \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(4)} \\ & \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(9)} & \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{(7)} \end{aligned}$$

$$k = 1, k = -4 \quad (2) \quad . k \neq 1, k \neq -2 \quad (1) \quad (8)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (2) \quad . (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (1) \quad (9)$$

$$. CD^2 - A \quad (4) \quad . (P^{-1})^T A^T P^T \quad (3) \quad . D \quad (2) \quad . A^{-1}DC^{-1} \quad (1) \quad (10)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (6) \quad . (A + C^{-1})^{-1} A \quad (5)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (7) \quad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (8) \quad X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$. A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad (9) \quad . A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad (11)$$

$$. B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad (2) \quad , f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1) \quad (10)$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad (12)$$

פרק 3 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4. \text{ חשב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{ב. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 3 & 3 & L & 3 \\ 1 & 3 & 6 & L & 6 \\ M & M & MO & & M \\ 1 & 3 & 6 & L & 3(n-1) \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 2 & 2 & L & 2 \\ 1 & 2 & 3 & L & 3 \\ M & M & MO & & M \\ 1 & 2 & 3 & L & n \end{pmatrix} \quad (5) \quad a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{אחרת} \end{cases} \quad (4)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

* בסעיף 7: א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

$$|-2A^2A^T \text{adj}B| \quad (4) \quad |-A^{-2}B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1}B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. 2. $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A| = 0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, מצא את n .

ז. נתונים: $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$, $\det(A_{n \times n}) = 2$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 & \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 & & & \\ 2x + 5y + 44z = 51 & & & & & \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} kx + y + z + t + r = 1 \\ x + ky + z + t + r = 1 \\ x + y + kz + t + r = 1 \\ x + y + z + kt + r = 1 \\ x + y + z + t + kr = 1 \end{array}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x = y = z = t = r$.

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(14) נתון :

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1) $(adjA)_{1,5}$ (2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A| = 1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: (1) $C + D$ (2) $A + B$ (3) AD (4) CD (5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה :

1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$ 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בטרמיננטות.

תשובות:

9 (10) .-300 (9) .234 (8) .24 (7) .-14 (6) .-3 (5) .-1 (4) .-1 (3) .29 (2) . $ad-bc$ (1) (1)

.6 (11) .6 (1) (2) .0 (2) .0 (3) .3 (4) .24 (5) .44 (6) .104 (7) (3) (1) .120 (2) .114 (3) .6 (3)

(5) (1) .-8 (2) .16 (3) .9 (7) (1) $n!$ (2) $(-1)^{n-1}n!$ (3) $\frac{n(3n+1)}{2}$ $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

(4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$ (5) .1 (6) $2 \cdot 3^{n-2}$

(7) $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_2 = a^2 - bc$, $D_3 = a^3 - 2abc$.א

ב.1. $D_n = 2^{n+1} - 1$.2 $D_{20} = 2^{21} - 1$ (8) .0 (9) (1) .4 (2) 2^{13} (3) .-8 (4) -2^{11}

(10) ב. $81/32$.ג $|A|=18$, $|B|=-2/3$.ד 4^n (11) (1) $x=1$, $y=2$

(2) $x=1$, $y=1$, $z=2$ (3) $x=y=z=t=1$ (12) .א $k \neq 1$, $k \neq -4$.ב $k=-2$

ג. לא.

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (1) \quad (13)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(14) (1) .240 (2) .0.5 (15) (1) לא (2) לא (3) לא (4) לא (5) כן. (16) $k=0$

(17) א.1. .13 .א.2. .14 .ב.22 .ג. $3x-y+4z+2=0$.ד.2

פרק 4 - מרחבים וקטורים

סימונים:

R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .

$M_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .

$P_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .

$F[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות ($f: R \rightarrow R$) מעל השדה R .

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$

ב. $W = \{(a, b, c) \mid a = c\}$

ג. $W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\}$

ד. $W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\}$

ה. $W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\}$

ו. $W = \{(a, b, c) \mid b = a + d, c = a + 2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n[R]$:

א. $W = \{A \mid A = A^T\}$, כלומר, W מורכב מן המטריצות הסימטריות.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B .

כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

ג. $W = \{A \mid |A| = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.

ד. $W = \{A \mid A^2 = A\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס, כלומר,

$W = \{A \mid AB = 0\}$

ז. $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$, כלומר, אפס. כלומר, $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n[R]$.

א. $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$, כלומר, 4 כשורש. כלומר, $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$, כלומר, $4 \geq \deg(p)$.

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4 \leq n \leq 7$.

ו. $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$.

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F[R]$.

א. $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$ ממשי x כלל, כלומר, $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$.

ב. $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$ ממשי x כלל, כלומר, $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

ז. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$.

(5) בדוק האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי R .

ב. מעל שדה המרוכבים C .

צירופים לינאריים, מרחב נפרש, תלות לינארית

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), u_2 = (0, 11, -5, 3), u_3 = (2, -5, 3, 1), u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלוייה לינארית ?ב. 1. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

$$ד. נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.$$

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$.3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית.

$$ה. נתון $v = (a, b, c, d)$$$

1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית ?ו. הבע את הוקטור $(2, -3, 3, 1)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3 .

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים

ניתן לעשות זאת?

(7) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.

2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים:

$$p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3, p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3,$$

$$p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3, p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.

2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של

שאר הפולינומים.

3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a, b, c הוקטורים הבאים תלויים לינארית:

$$\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף

של הוקטורים האחרים:

א. $\{u - v, u - w, u + v - 2w\}$

ב. $\{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\}$

ג. $\{u + v, v + w, w\}$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C . ב. מעל R .

בסיס ומימד

בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

$$(1) \{ (1, 0, 1), (0, 0, 1) \}$$

$$(2) \{ (1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 1) \}$$

$$(3) \{ (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9) \}$$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

$$(1) \{ 1+x, x^2+2x+3 \}$$

$$(2) \{ 1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$$

$$(3) \{ 1+2x+3x^3, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (2, 3, 4)\}$

א. האם T בסיס ל- R^3 .

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- T .

ג. השלם את T' לבסיס של

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(16) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad (1)$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (3).

(א) מצא בסיס וממד ל- U , W ו- V .

(ב) (1) מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$. (2) מצא ממד ל- $U \cap V$.

(ג) מצא בסיס ל- $U \cap V$.

(17) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = d\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(18) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(19) נתון $U = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(20) נתון $U = \{A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A = A^T\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(21) נתון $U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(22) נתון $U = \{p(x) \in P_3[\mathbb{R}] \mid p(1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת מרחב

(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$.U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$.U = \text{span}\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת

המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס

(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \quad (3) \quad [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} \quad (2) \quad [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} \quad (1)$$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B . סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E . סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E . סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

פרק 5 - תכנון ליניארי: ניסוח בעיות ופתרון גרפי

דוגמא:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

s. t.

$$2X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$4X_1 + X_2 \leq 8$$

$$3X_2 \leq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

X_1 – מספר היחידות שנייצר ממוצר 1

X_2 – מספר היחידות שנייצר ממוצר 2

פתור את הבעיה באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.

שאלה 1:

- מפעל מייצר 2 סוגי כובעים: כובעים כחולים וכובעים אדומים. עלות הייצור של הכובעים הכחולים הינה 5 ₪ לכובע ואילו של הכובעים האדומים 4 ₪ לכובע. המפעל מוכר את כל אחד מהכובעים ב-10 ₪.
- בייצור של כל אחד מהכובעים הכחולים יש צורך ב-2 מטרים של בד ובייצור של כל אחד מהכובעים האדומים יש צורך ב-3 מטרים של בד. לרשותו של המפעל 40 מטרים של בד כחול ו-30 מטרים של בד אדום.
- מנהל המפעל מוכן להקצות 100 ₪ לייצור הכובעים משני הצבעים. בנוסף, הוא אינו מעוניין לייצר יותר מ-20 כובעים אדומים.
- א. הגדר משתני החלטה ונסח את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי מתאים: פונקציית מטרה ואילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
 - ב. פתור את הבעיה שניסחת בסעיף א' באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
 - ג. מהם הערכים הדואליים של האילוצים? הסבר ונמק את תשובתך.
 - ד. מצא חסמים על כל אחד מהמקדמים בפונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
 - ה. מצא חסמים על אגף ימין של כל האילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
 - ו. חברו של מנהל המפעל מבקש לרכוש ממנו 10 מ' בד כחול תמורת 2 ₪ למטר. האם כדאי למנהל למכור? אם לא, הסבר. אם כן, חשב את השינוי ברווח.
 - ז. מנהל המפעל קיבל הקצאה נוספת של 15 מ' בד אדום. האם ישפיע הדבר על הרווח הכולל? אם לא, הסבר. אם כן, חשב את השינוי ברווח ובכמויות הייצור.

שאלה 2:

לתערובת מזון ששלמה מעוניין ליצור דרושים לפחות 60 יח' ויטמין C, 120 יח' של ויטמין A, 60 יח' של ויטמין D ו-210 יח' של ויטמין E. קיימים בחנות רק שני סוגי מזון המכילים את ארבעת סוגי הוויטמינים בהרכבים שונים:

E	D	A	C	
35	15	20	5	סוג מזון 1
21	15	15	30	סוג מזון 2

ק"ג מסוג מזון 1 עולה ₪5 ואילו ק"ג מסוג מזון 2 עולה 6 ₪. שלמה מעוניין לקנות כמות מסוימת מסוגי המזון הנ"ל על מנת לעמוד במגבלות ולמזער עלויות.

- הגדר משתני החלטה ונסח את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי מתאים: פונקציית מטרה ואילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
- פתור את הבעיה שניסחת בסעיף א' באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
- מהם הערכים הדואליים של האילוצים? הסבר ונמק את תשובתך.
- מצא חסמים על המקדם של X_1 בפונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
- מצא חסמים על אגף ימין של כל האילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.

שאלה 3:

לקוח 'בנק השואלים' חסך 900,000 ₪ ומעוניין להשקיע את כספו (או חלק ממנו). הוא פנה לבנקאי האישי שלו לקבלת המלצה. הבנקאי פרש בפניו את 2 האפשרויות בטבלה הבאה:

רווח שנתי	אפיק ההשקעה
30%	מניות
20%	אג"ח

הלקוח מעוניין להשקיע לכל הפחות 400,000 ₪ באג"ח. כמו כן, הוא מעוניין להשקיע במניות לכל היותר חצי מהסכום שהוא משקיע באג"ח.

- הגדר משתני החלטה ונסח את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי מתאים: פונקציית מטרה ואילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
 - פתור את הבעיה שניסחת בסעיף א' באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
 - מהם הערכים הדואליים של האילוצים? הסבר ונמק את תשובתך.
 - מצא חסמים על המקדם של X_1 בפונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
 - מצא חסמים על אגף ימין של כל האילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
- חברו של הלקוח מעוניין לתת לו הלוואה בריבית של 20%. האם כדאי ללקוח לקחת את ההלוואה? עד איזה סכום הלוואה משתלמת? אם ההלוואה הינה בסכום של 100,000 ₪, מה יהיה השינוי ברווח ומהו סכום הכסף שהלקוח ישקיע בכל אחד מאפיקי ההשקעה?
 - אם הרווח עבור השקעה במניות יגדל ל-60%, כיצד ישתנה רווחו הכולל של הלקוח?

שאלה 4:

חנות טיפוח רוכשת מלאי חודשי של 2 סוגי קרמים בריחות וניל ותות. נפח קופסת קרמים בריח וניל (המכילה קרם גוף, קרם רגליים, קרם ידיים וקרם פנים) הינו 0.25 מ"ר ואילו נפח קופסת קרמים בריח תות הינו 0.2 מ"ר (קופסת הקרמים בריח תות לא מכילה קרם פנים). מנהל החנות, שמואל, קונה את הקרמים בסיטונאות ולכן מחירה של קופסת קרמים בריח וניל הינו 200 ₪ ואילו מחירה של קופסת קרמים בריח תות הינו 400 ₪ (תמציות התות יקרות יותר). שמואל מוכר כל קופסא בחנות במחיר גבוה פי 2.5 ממחיר קנייתו.

בתחילת חודש מאי, החליט שמואל לבצע הזמנה של קרמים. הוא הקציב לרכישה סכום כולל של 50,000 ₪. חברו הטוב, אלי, מוכן לספק לו הובלה חינם של הקופסאות לחנות. המקום אותו מקצה אלי במשאיתו להובלה הינו 30 מ"ר.

במידה ושמואל יחליט להזמין קופסא לא מלאה של קרמים, הוא יקבל את החלק היחסי של הקופסא. משמע, מספר הקופסאות שהוא מזמין לא חייב להיות מספר שלם.

בנוסף, שמואל החליט שלכל היותר 70% מהמלאי בחודש מאי יהיה מורכב מקרמים בריח וניל. שמואל מעוניין להביא למקסימום את הרווח החודשי.

א. הגדר משתני החלטה ונסח את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי מתאים: פונקציית מטרה ואילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.

ב. פתור את הבעיה שניסחת בסעיף א' באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. מה מיוחד בפתרון המתקבל? הסבר ונמק את תשובתך.

פתרונות פרק 2

פתרון שאלה 1:

א.

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 6X_2$$

S.T.

1) $2X_1 \leq 40$

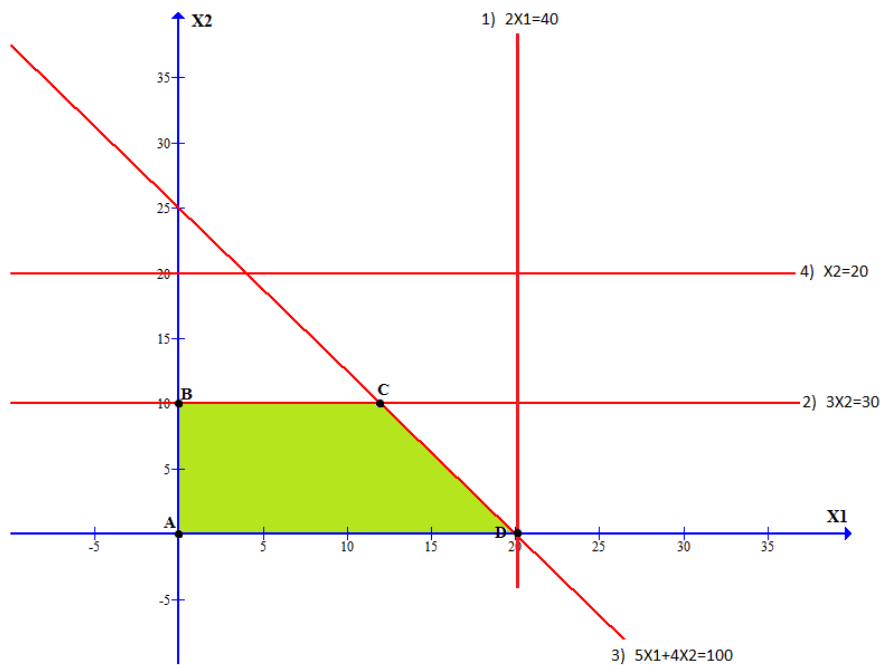
2) $3X_2 \leq 30$

3) $5X_1 + 4X_2 \leq 100$

4) $X_2 \leq 20$

ושלמים $X_1, X_2 \geq 0$

ב.



כמות הכובעים הכחולים שהמפעל ייצר הינה 12 וכמות הכובעים האדומים שהמפעל ייצר הינה 10. רווחו של המפעל יהיה 120 ₪.

ג. הערכים הדואליים של האילוצים: $0, 1, \frac{2}{3}, 0$.

ד. $4 \leq C_2 \leq \infty, 0 \leq C_1 \leq 7.5$.

ה. אילוץ 1: 24, 0. אילוץ 2: 60, 0. אילוץ 3: 140, 40. אילוץ 4: 10, 0.

ו. כדאי. תוספת של 20 ₪ לרווח הכולל.

ז. הרווח הכולל יגדל ב- 10 ₪. כמות הכובעים הכחולים שהמפעל ייצר הינה 8 וכמות הכובעים האדומים שהמפעל ייצר הינה 15.

פתרון שאלה 2:

א.

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 6X_2$$

S.T.

1) $5X_1 + 30X_2 \geq 60$

2) $20X_1 + 15X_2 \geq 120$

3) $15X_1 + 15X_2 \geq 60$

4) $35X_1 + 21X_2 \geq 210$

$X_1, X_2 \geq 0$

ב.



שלמה יקנה $5\frac{1}{3}$ ק"ג מסוג מזון 1 ו- $1\frac{1}{9}$ ק"ג מסוג מזון 2. עלותו הכוללת תהיה $33\frac{1}{3}$.

ג. הערכים הדואליים של האילוצים: $\frac{1}{9}, 0, 0, \frac{8}{63}$.

ד. $1 \leq C_1 \leq 10$.

ה. אילוצ 1: 300, 30. אילוצ 2: $-\infty, 123\frac{1}{3}$. אילוצ 3: $-\infty, 96\frac{2}{3}$. אילוצ 4: 204.

.420

פתרון שאלה 3:

א.

$$\text{Max } Z = 1.3X_1 + 1.2X_2$$

S.T.

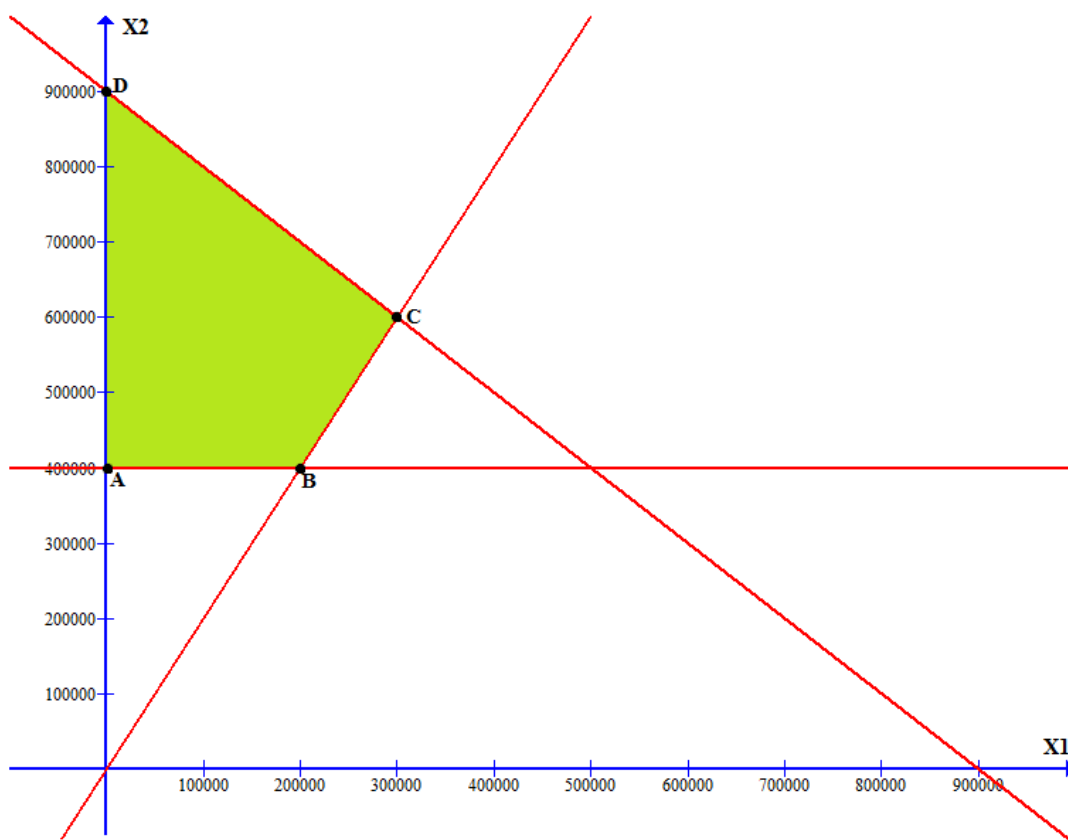
$$1) X_1 + X_2 \leq 900000$$

$$2) X_2 \geq 400000$$

$$3) X_1 - 0.5X_2 \leq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ב.



הלקוח ישקיע 300,000 ₪ במניות ו-600,000 ₪ באג"ח. רווחו הכולל יהיה 1,110,000.

ג. הערכים הדואליים של האילוצים: $1\frac{7}{30}, 0, \frac{1}{15}$.

ד. $1.2 \leq C_1$.

ה. אילוץ 1: 600000, $-\infty$; אילוץ 2: $-\infty$, 600000; אילוץ 3: -450000, 300000.

ו. ההלוואה משתלמת בכל סכום.

ז. יגדל ב-90000.

פתרון שאלה 4:

.א.

$$\text{Max } Z = 300X_1 + 600X_2$$

S.T.

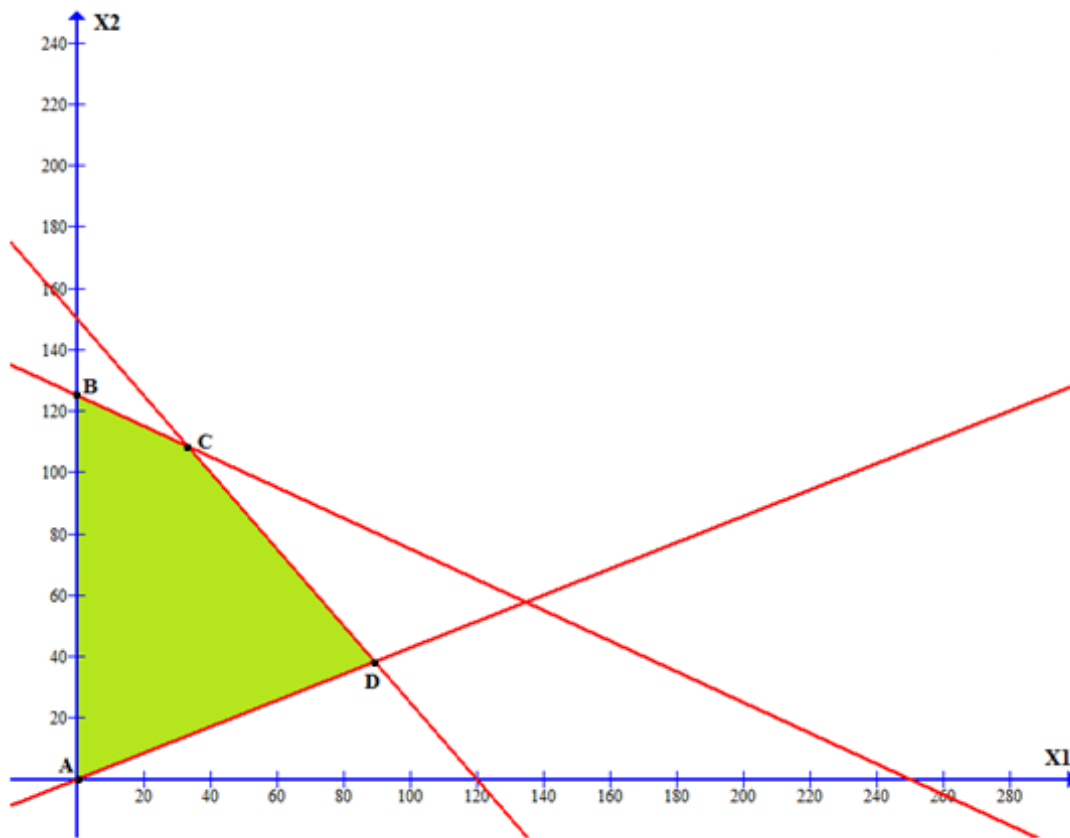
$$1) 200X_1 + 400X_2 \leq 50000$$

$$2) 0.25X_1 + 0.2X_2 \leq 30$$

$$3) 0.3X_1 - 0.7X_2 \leq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

.ב.



2 פתרונות אופטימאליים. רווחו הכולל של שמואל יהיה 75,000 ₪.